

نتیجه

$$C^{\infty} \rightarrow C(2^{nR-1}, n)$$

$$R' = \frac{nR-1}{n} = R - \frac{1}{n}$$

اثبات عکس قضیه ظرفیت کانال

باید نشان دهیم که اگر برای $C(2^{nR}, n)$ داشته باشیم $\lambda^{(n)} \rightarrow 0$ به اندازه کافی

$C < R$ باشد.

برای اثبات این موضوع ایده‌آلات ساده‌تر بدون خطا بودن که یادگیری کنیم. یعنی حالتی که
(Zero-Error)

$$P_e^{(n)} = 0$$

$$P_e^{(n)} = 0 \Rightarrow P_r \{w \neq \hat{w}\} = 0 \leq P_r \{w = \hat{w}\} = 1$$

$$\Rightarrow P_r \{w = g(y^n)\} = 1 \Rightarrow w \stackrel{P}{=} g(y^n) \quad \textcircled{1}$$

ستادی در احتمال

فرمان می‌کنیم که اندیس w به صورت یکنواخت از مجموعه اندیس‌های $\mathcal{W} = \{1, 2, \dots, 2^{nR}\}$

$$H(w) = \log |\mathcal{W}| = nR$$

انتخاب می‌شود. بنابراین

از لحاظ مدیریت

$$I(w; y^n) = H(w) - \underbrace{H(w|y^n)}_0 = H(w) = nR$$

۰ اثر y^n معلوم باشد، پس نیز معلوم است ①

$$\Rightarrow nR = I(\omega; y^n) \leq I(x^n; y^n) \leq \sum_{i=1}^n I(x_i; y_i) \leq nC$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 $\omega \rightarrow x^n \rightarrow y^n \rightarrow \hat{\omega}$
 $\uparrow$ $\uparrow$
 $x^n(\omega)$ $g(y^n)$

$\uparrow$ $\uparrow$
 DMC صن ترین طر مبی

$\Rightarrow R \leq C$
 بنابراین برای هر که با خطای صفر، نرخ که باید که حلیه یا مساری طر مبی باشد.
 در ادامه حالت متن را به حالتی که خطای که به اندازه ریزه کم باشد تقسیم می دهیم.
 برای این منظور لازم است دوام در ادامه معرفی شوند.

فرض می‌کنیم که W به صورت یکنواخت از مجموعه اندیس $\{1, 2, \dots, 2^{nR}\}$ انتخاب شده.

است. بنابراین $H(W) = nR$

علامه بر این می‌دانیم که $\hat{W} \rightarrow Y^n \rightarrow X^n \rightarrow W$ یک زنجیره مارکوف سه تایی است.

$$P_r \{W \neq \hat{W}\} = \frac{1}{2^{nR}} \sum_{i=1}^n \lambda_i = P_e^{(n)}$$

لم ۱ - نامساوی فانون

$$H(W/\hat{W}) \leq 1 + P_e^{(n)} nR$$

رابطه فانون همان نامساوی فانون است که در نسخه‌های قبلی بیان شده.

$$P_r \{W \neq \hat{W}\} = P_e^{(n)}, \quad \lg |W| = nR$$

لم ۲- برای حرکت از DMC با فرضیات c, d, r, m

$$I(x^n; y^n) \leq nc \quad \forall p(x)$$

اثبات:

$$I(x^n; y^n) = H(y^n) - H(y^n | x^n)$$

$$= H(y^n) - \sum_{i=1}^n H(y_i | y_{i-1}, \dots, y_1, x^n)$$

↑
اعتماد بر همه

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{DMC}}}{=} H(y^n) - \sum_{i=1}^n H(y_i | x_i) \leq \underbrace{\sum_{i=1}^n H(y_i) - \sum_{i=1}^n H(y_i | x_i)}_{\sum_{i=1}^n [H(y_i) - H(y_i | x_i)]}$$

↑
DMC

$$\Rightarrow I(x^n; y^n) \leq \sum_{i=1}^n I(x_i; y_i) \leq nC$$

↑
هر حرف

$$\Rightarrow I(x^n; y^n) \leq nC$$

n بار استناد به کانال، هر حرف (per transmission) را تغییر می دهد.

با یک درسم با n سرتان عکس مقصود هر حرف کانال را اشتباه کرد.

عکس مقصود: اگر که $C(2^{nR}, n)$ و $\lambda^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ وجود داشته باشد باید داشته

باشیم $R \leq C$

$$P_e^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\lambda^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

رقتی

از طرف دیگر رقتی اندازی به صورت متضاد انتخاب می‌شوند، داریم

$$P_e^{(n)} = \frac{1}{2^{nR}} \sum_{i=1}^{2^{nR}} \lambda_i = P_r \{W \neq \hat{W}\}$$

همچنین داریم $H(W) = nR$

$$\Rightarrow nR = H(W) = H(W|\hat{W}) + I(W; \hat{W}) \leq 1 + P_e^{(n)} nR + I(W; \hat{W})$$

↑
نمایندگی مشترک

$$I(W; \hat{W}) = H(W) - H(W|\hat{W})$$

$$\Rightarrow nR \leq 1 + P_e^{(n)} nR + I(W; \hat{W}) \leq 1 + P_e^{(n)} nR + I(X^n; Y^n) \leq 1 + P_e^{(n)} nR + nC$$

$\omega \rightarrow X^n \rightarrow Y^n \rightarrow \hat{W}$
 نمایش دی‌گرامش (مضامین)

$\uparrow$
 2^م

$$\Rightarrow nR \leq 1 + P_e^{(n)} nR + nC$$

$$\Rightarrow R \leq \frac{1}{n} + P_e^{(n)} R + C \quad \textcircled{*} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\substack{P_e^{(n)} \rightarrow 0 \\ \frac{1}{n} \rightarrow 0}} R \leq C$$

اثبات انجام شد. در این سمت برای مقصود طرفین، اثبات سمت چپ طرفین شانون است.
 در اثبات قوی مقصود طرفین، نشان داده می شود که با افزایش n ، خطای هر دو جانب به یک
 صفر میل می کند.

$$P_e^{(n)} \geq 1 - \frac{C}{R} - \frac{1}{nR}$$

از رابطه $\textcircled{*}$ می توان حدی برای خطای هر دو

دید می شود که اگر $R > 1$ باشد، نمی توان خطای به میزان دلخواه کم کرد.

از نظر طراحی که مناسب برای کانال، جالب است اگر حالت Zero-error را دوباره بررسی کنیم و ببینیم تحت چه شرایطی توان به ظرفیت دست پیدا کرد. در واقع به دنبال ایده هایی برای طراحی که های نزدیک به ظرفیت هستیم.

خطای صفر

$$nR = H(\omega) = H(\omega | \hat{\omega}) + I(\omega; \hat{\omega}) = \bar{I}(\omega; \hat{\omega})$$

$$\Rightarrow nR = \bar{I}(\omega; \hat{\omega}) \leq I(x^n; y^n)$$

نسبتی بر ارزش اطلاعات

$$\omega \rightarrow x^n \rightarrow y^n \rightarrow \hat{\omega}$$

ستادی زمانی برقرار است که $I(x^n; y^n | \omega) = 0$

و $I(x^n; y^n | \hat{\omega}) = 0$ یعنی همه که ها جدا از هم باشند و هر که $\hat{\omega}$ آماره کافی برای دیدن ω باشد

$$x^n \rightarrow \hat{\omega} \rightarrow y^n$$

$$nR \leq I(x^n; y^n)$$

از طرف دیگر

$$I(x^n; y^n) = H(y^n) - H(y^n | x^n)$$

$$= H(y^n) - \sum_{i=1}^n H(y_i | y_{i-1}, \dots, y_1, x^n)$$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{DMC}}}{=} H(y^n) - \sum_{i=1}^n H(y_i | x_i) \leq \sum_{i=1}^n H(y_i) - \sum_{i=1}^n H(y_i | x_i)$$

ستادی زمانی برقرار است که y_i ها مستقل باشند

$$\Rightarrow nR \leq \sum_{i=1}^n |H(y_i) - H(y_i | x_i)| \Rightarrow nR \leq \sum_{i=1}^n I(x_i; y_i) \leq nC$$

تقریباً حتمی ستادی زمانی برقرار است که توزیع x برابر P^* باشد در $I(x; y)$ را نیز می‌تواند

اگر هدف، رسیدن به ظرفیت با خطای صفر باشد $(C_{\text{zero-error}})$ باید چهار شرط زیر، همزمان برقرار باشد،

۱- کلمات که جدا از هم باشند

۲- $\hat{w}$ آماره کافی دلبه‌ی یک باشد

۳- y ها مستقل از هم باشند

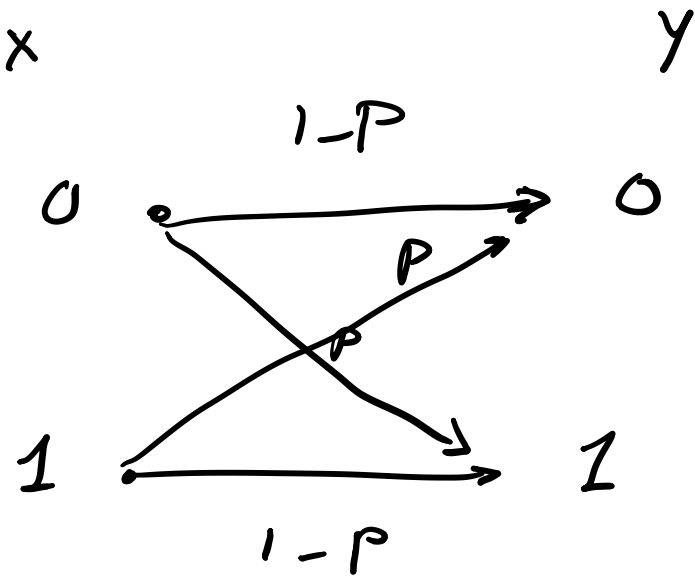
۴- توزیع x برابر $P^*(x)$ باشد که $I(x, y)$ را به نرمی می‌لند.

در حالت کلی برقراری این چهار شرط به صورت همزمان امکان پذیر نیست. بنابراین می‌توان

گفت که $C_{\text{zero-error}}$ یا برابر C است یا برابر صفر است. به طور مثال در مورد داشتن

تکرار خطا دار داریم $C_{\text{zero-error}} = C$ اما در مورد کانال BSC، چون y ها نمی‌توانند مستقل

از هم باشند، $C_{\text{zero-error}} = 0$ است



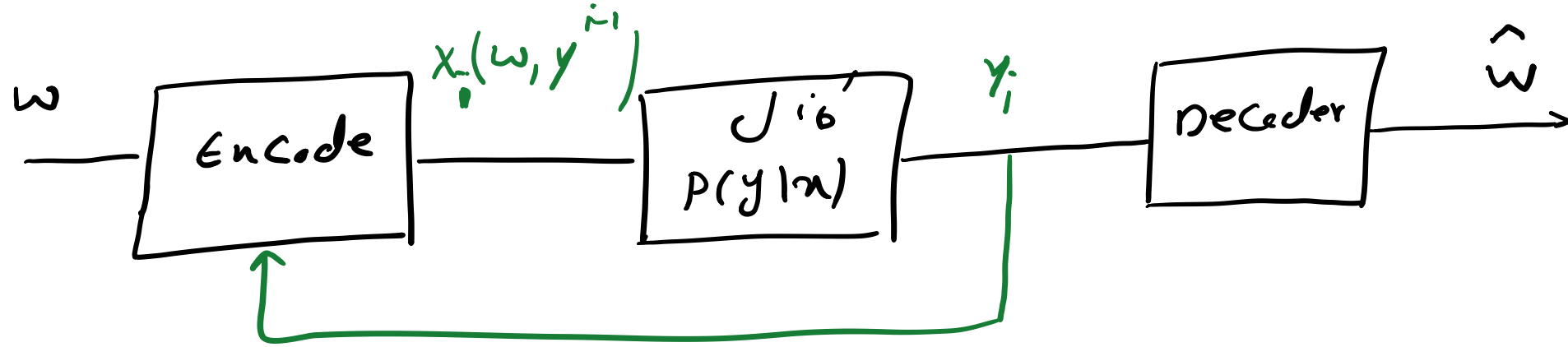
7) 1-8, 11, 13, 20, 27

(عمرین سری پیام)

دارای سی فراهم به اینم که اگر از خودی کانال به اندرند ضعیف به هم، یا تا شری در
طرفیت کانال دارد یا نه؟

- طرقت کانال DMC با ضریب

بلور دایرام زیر، ساختار کانال DMC با ضریب را نشان می دهد.



$$x_i | w, y^{i-1}$$

یک کد $C(2^{nR}, n)$ روی کانال ضریب به صورت تابع

تقریبی می شود.

$$y^{i-1} = (y_1, y_2, \dots, y_{i-1})$$

تابع دیکریس $g(y^n)$ تقریبی می شود. $y^n \rightarrow \mathcal{W} = \{1, 2, \dots, 2^{nR}\}$

احتمال خطا به صورت زیر تعریف می شود

$$P_e = P_r \{ w \neq \hat{w} \} = P_r \{ g(y^n) \neq w \}$$

C_{FB} : ظرفیت یک کانال DMC با ضریب برابر کران بالایی تمام نرخهای قابل دسترسی توسط کدهای نزدیک تعریف می شود.

قضیه: $C_{FB} = \max_{p(x)} I(x; y) = C$ یعنی ضریب ظرفیت را تغییر نمی دهد.

اثبات: با توجه به اینکه حالت بدون ضریب یک حالت خاص از کانال ضریب دار است، می توان گفت

$$C \leq C_{FB}$$

در ادامه من خواهم نشان دهم که $C \leq C_{FB}$. برای این منظور از رابطه‌ی درستی
 نیل استفاده کردیم - شری تران استفاده کرد، چون

$$I(x^n; y^n) \leq n C_{FB} \quad \times$$

$$H(y_i | y_{i-1}, \dots, y_1, x^n) = H(y_i | x_i) \quad \times$$

اما ما می‌خواهیم برقرار است .
 فرض می‌کنیم که ω به صورت یک زنجیره از مجموعه‌های

$$\omega = \{1, 2, \dots, 2^{nR}\}$$

انتخاب شده است، در این صورت

$$P_e^{(n)} = P_r \{ \omega \neq \hat{\omega} \} , \quad H(\omega) = nR$$

از طرف دیگر ✓

$$H(w) = H(w|\hat{w}) + I(w; \hat{w}) \leq 1 + P_e^{(n)} nR + I(w; \hat{w})$$

$$\Rightarrow nR = H(w) \leq 1 + P_e^{(n)} nR + I(w; \hat{w}) \leq 1 + P_e^{(n)} nR + I(w; y^n)$$

↑
نسبته‌ی پردازش اطلاعات

$$w \rightarrow y^n \rightarrow g(y^n) = \hat{w}$$

از طرف دیگر داریم ✓

$$I(w; y^n) = H(y^n) - H(y^n|w) = H(y^n) - \sum_{i=1}^n H(y_i | \underbrace{y_{i-1}^{i-1}}_{y^{i-1}}, w)$$

↑
تجزیه‌ی زنجیره‌ای

با داشتن w و y^{i-1} ، $x_i | w, y^{i-1}$ مشخص است. بنابراین می‌توانیم

$$I(\omega; y^n) = H(y^n) - \sum_{i=1}^n H(y_i | y_{i-1}, \dots, y_1, \omega)$$

$$= H(y^n) - \sum_{i=1}^n H(y_i | y^{i-1}, \omega, x_i)$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} H(y^n) - \sum_{i=1}^n H(y_i | x_i) \leq \sum_{i=1}^n H(y_i) - \sum_{i=1}^n H(y_i | x_i)$$

$$(\omega, y^{i-1}) \rightarrow x_i \rightarrow y_i$$

$$\Rightarrow I(\omega; y^n) \leq \sum_{i=1}^n (H(y_i) - H(y_i | x_i))$$

$$\Rightarrow I(\omega; y^n) \leq \sum_{i=1}^n I(x_i; y_i) \leq nC$$

صن ترتیب طریقت

$$\Rightarrow nR \leq 1 + P_e^{(n)} nR + nC$$

$$\Rightarrow R \leq P_e^{(n)} R + C + \frac{1}{n}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} R \leq C \xrightarrow{\text{تعریف } C_{FB}} C_{FB} \leq C$$

C_{FB} را نمایی تمام زخای قابل دسترسی می‌دهد

هیچ زخی بالاتر از ظرفیت، قابل دسترسی نیست

$$\Rightarrow C_{FB} = C$$

- فیدبک تأثیری روی ظرفیت کانال PMC ندارد. فقط می‌تواند روی عملیات که به کمک فیدبک تأثیرگذار باشد.

قصد مبادسازی کانال رمنج

در این سمت می فرماییم به اینست، تحت چه شرایطی می توان اطمینان داد مبنی بر مبادسازی کانال
ارسال گردد. به طور واضح تر آن، با این شرایط انبساطی کانال را به صورت مستقیم از مرحله ای
باجرای می که کانال مناسب به صورت قابل اطمینان دردی کانال را می کشیم. یا لازم است
استدرا انبساطی کانال را به صورت به یک انبساطی مناسب صورت می کشیم. این انبساطی به
این باب که کانال مناسب که کرده دردی کانال ارسال کنیم. یا به عبارت دیگر تا دهن بن
که نباید تمام کانال رمنج را که می بیند مبنی بر مبادسازی کانال به صورت تکرار و تکرار؟
به دهن و بدن بررسی را می توان گفت که در حالت تمام سبب به حالت در مرحله ای افت علامت داریم.

ضمیمه

در این بخش نشان می دهیم که روش دوم حله ای به خوبی روش ترام روی کانال نرزی کاری کند.
به عبارت دیگر، در این بخش نشان خواهیم داد که در سیستم خازنی می توان که یک منبع
که یک کانال را به صورت دریلر مجزا و مستقل از نظر رفت و در هر یک از
به صورت بهی انجام دارد. از نظر عملکرد، تفاوتی با حالت ترام نخواهیم داشت.

